

Examen de rattrapage (2h) – Introduction à l’optimisation

Vincent Leclere

25/02/2025

Tout document papier autorisé. Toute communication/appareil électronique interdit.
La clarté de la rédaction et la justification des résultats seront évaluées.

1. (3 points) **PL(NE): Vrai/Faux.**

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse, sans justification (−0.5 par réponse fausse).
On se place toujours en minimisation.

- (a) Un programme linéaire (PL) faisable admet toujours une solution optimale.
- (b) Soit x^* une solution optimale d’un PL. Alors x^* est un sommet de l’ensemble de contraintes.
- (c) (Dualité forte) Si un PL est faisable, alors la valeur optimale du primal est égale à celle du dual.
- (d) (Relaxation) Soit un PLNE et sa relaxation linéaire. On a toujours

$$\text{val}(\text{relaxation}) \leq \text{val}(\text{PLNE}).$$

- (e) (Simplexe) Soit B une base réalisable d’un PL et $r = c_N - A_N^\top (A_B^{-1})^\top c_B$ le vecteur des coûts réduits. Si $r \leq 0$, alors la solution basique associée à B est optimale.
- (f) (Relaxation) Si la relaxation linéaire d’un PLNE est *faisable*, alors le PLNE est *faisable*.

Solution:

- (a) **Faux.** Un PL faisable peut être non borné.
- (b) **Faux.** Une solution optimale peut être combinaison convexe stricte de deux solutions extrémales.
- (c) **Vrai.** En PL, si le primal ou le dual est faisable alors il n’y a pas de saut de dualité.
- (d) **Vrai.** La relaxation agrandit l’ensemble faisable, donc (en minimisation) la valeur optimale ne peut qu’être plus petite.
- (e) **Faux.** Non, il faut que $r \geq 0$ pour que la solution basique soit optimale.
- (f) **Faux.** Une solution faisable réelle n’est pas forcément entière.

2. (3 points) **PLNE : traduire des phrases en contraintes linéaires.**

On utilise des variables binaires $b_i \in \{0, 1\}$ (b_i est "active" si $b_i = 1$) et des variables continues $x_i \in [0, M]$.
Traduire chacune des phrases suivantes en contraintes linéaires.

- (a) (1 point) " b_3 est active si b_1 ou b_2 est active."
- (b) (1 point) " x_1 et x_2 ne peuvent pas être strictement positives simultanément."

- (c) (1 point) “Si x_1 est strictement positive, alors $x_2 \geq 2$.”

Solution:

- (a) Pour imposer $(b_1 = 1 \text{ ou } b_2 = 1) \Rightarrow b_3 = 1$, on peut écrire

$$b_3 \geq b_1, \quad b_3 \geq b_2.$$

- (b) $x_1 \leq Mb_1$, $x_2 \leq Mb_2$, et $b_1 + b_2 \leq 1$.

- (c) $x_1 \leq Mb_1$, $x_2 \geq 2b_1$.

3. (4 points) **Existence, unicité et caractérisation d'un minimiseur.**

On considère le problème

$$\min_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) := e^{x_1} + e^{x_2} \quad \text{s.c.} \quad x_1 x_2 \geq 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

- (a) (2 points) Discuter de l'existence et l'unicité d'une solution optimale.
 (b) (1 point) Justifier que pour tout point admissible (x_1, x_2) , on a $x_1 + x_2 \geq 2$.
 (c) (1 point) Dédurre que $(1, 1)$ est solution optimale.

Solution:

- (a) Posons

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 \geq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

On note que C est *fermé* (préimage de $[1, +\infty)$ par l'application continue $(x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$ intersectée avec des demi-espaces fermés). De plus, f est continue et *strictement convexe* sur $\mathbb{R}^2$ (somme de fonctions e^{x_i} strictement convexes).

Pour l'existence : l'ensemble C n'est pas compact, mais on peut utiliser un argument de coercivité *sur* C : on montrera plus bas que tout point admissible vérifie $x_1 + x_2 \geq 2$, d'où

$$\frac{e^{x_1} + e^{x_2}}{2} \geq e^{(x_1+x_2)/2} \geq e, \quad \Rightarrow \quad f(x_1, x_2) \geq 2e.$$

Comme $(1, 1) \in C$ et $f(1, 1) = 2e$, la borne inférieure $2e$ est atteinte : il existe une solution optimale.

Pour l'unicité : l'égalité $f(x_1, x_2) = 2e$ impose l'égalité dans Jensen (strict convexité de e^x) donc $x_1 = x_2$, et l'égalité $x_1 + x_2 = 2$ impose $x_1 = x_2 = 1$. Le minimiseur est donc unique.

- (b) Pour $(x_1, x_2) \in C$, on a $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$ et $x_1 x_2 \geq 1$. Par AM-GM,

$$x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1 x_2} \geq 2.$$

- (c) Par Jensen (ou convexité) appliquée à e^x ,

$$\frac{e^{x_1} + e^{x_2}}{2} \geq e^{(x_1+x_2)/2}.$$

Avec $x_1 + x_2 \geq 2$ (question précédente),

$$f(x_1, x_2) = e^{x_1} + e^{x_2} \geq 2e^{(x_1+x_2)/2} \geq 2e.$$

Or $(1, 1) \in C$ et $f(1, 1) = 2e$. Donc $(1, 1)$ atteint la borne inférieure et est optimal.

(Optionnel : l'unicité suit car l'égalité dans Jensen impose $x_1 = x_2$ et l'égalité dans AM-GM impose $x_1 x_2 = 1$, d'où $(1, 1)$.)

4. (4 points) **Dualité d'un problème minimax.**

Soient $a_i \in \mathbb{R}^n$ et $b_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, \dots, m$. On considère

$$(P) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{1 \leq i \leq m} (a_i^\top x + b_i).$$

- (a) (1 point) Mettre (P) sous forme *épigraphique* en introduisant une variable t .
- (b) (2 points) Écrire le dual (D) sous forme d'un problème linéaire en explicitant les contraintes.
- (c) (1 point) Interpréter ces contraintes.

Solution:

- (a) On introduit $t \in \mathbb{R}$ et on écrit :

$$(P) \equiv \min_{x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}} t \quad \text{s.c.} \quad a_i^\top x + b_i \leq t, \quad i = 1, \dots, m.$$

- (b) Posons $g_i(x, t) = a_i^\top x + b_i - t \leq 0$ et des multiplicateurs $\lambda_i \geq 0$. Le Lagrangien vaut

$$\mathcal{L}(x, t, \lambda) = t + \sum_{i=1}^m \lambda_i (a_i^\top x + b_i - t) = t \left(1 - \sum_{i=1}^m \lambda_i \right) + x^\top \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \right) + \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i.$$

La fonction duale est $g(\lambda) = \inf_{x, t} \mathcal{L}(x, t, \lambda)$. Pour que l'infimum soit fini, il faut :

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i a_i = 0 \quad (\text{sinon } \inf_x = -\infty), \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \quad (\text{sinon } \inf_t = -\infty).$$

Sous ces contraintes, $g(\lambda) = \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i$, donc

$$(D) \quad \max_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i \quad \text{s.c.} \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i = 0.$$

- (c) *Interprétation* : λ est une combinaison convexe (car $\lambda \geq 0$ et somme = 1). La contrainte $\sum_i \lambda_i a_i = 0$ signifie que 0 est une combinaison convexe des vecteurs a_i (équilibre des pentes), et l'objectif maximise la combinaison correspondante des b_i .

5. (6 points) **Conditions de KKT.**

On considère le problème

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - 2x_1^2 - x_2^2 \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 1 \leq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- (a) (1 point) Justifier de l'existence de solutions optimales.
- (b) (5 points) Résoudre le problème à l'aide des conditions de KKT.

Solution: Notons $g_1(x) = x_1 + x_2 - 1 \leq 0$ et $g_2(x) = -x_2 \leq 0$ (équivalent à $x_2 \geq 0$). On introduit $\lambda \geq 0$ pour g_1 et $\mu \geq 0$ pour g_2 .

- (a) (1 point) f est continue et coercive (tend vers $+\infty$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$), et l'ensemble de contraintes est fermé, donc il existe une solution optimale.

(b) (5 points) Lagrangien :

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda, \mu) = x_1^4 + x_2^4 - 2x_1^2 - x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 1) + \mu(-x_2).$$

KKT :

- Faisabilité : $x_1 + x_2 \leq 1, x_2 \geq 0$.
- Stationnarité :

$$\partial_{x_1} \mathcal{L} = 4x_1^3 - 4x_1 + \lambda = 0, \quad \partial_{x_2} \mathcal{L} = 4x_2^3 - 2x_2 + \lambda - \mu = 0.$$

- Complémentarité :

$$\lambda(x_1 + x_2 - 1) = 0, \quad \mu x_2 = 0.$$

- Dual : $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$.

On distingue les cas.

Cas 1 : $x_2 > 0$. Alors $\mu = 0$. Si $x_1 + x_2 < 1$, alors $\lambda = 0$ et

$$4x_1^3 - 4x_1 = 0 \Rightarrow x_1 \in \{-1, 0, 1\}, \quad 4x_2^3 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 \in \{0, \pm 1/\sqrt{2}\}.$$

Avec $x_2 > 0$, on a $x_2 = 1/\sqrt{2}$, et la contrainte $x_1 + x_2 < 1$ élimine $x_1 = 1$. On obtient donc deux points KKT :

$$(0, 1/\sqrt{2}), \quad (-1, 1/\sqrt{2}),$$

avec $\lambda = \mu = 0$.

Si $x_1 + x_2 = 1$ et $x_2 > 0$, on cherche λ tel que les deux équations de stationnarité soient compatibles. On peut montrer que cela force $x_1 = 1$ donc $x_2 = 0$, contradiction. Donc pas de solution dans ce sous-cas.

Cas 2 : $x_2 = 0$. Alors la faisabilité donne $x_1 \leq 1$ et la stationnarité en x_2 impose $\mu = \lambda$. La complémentarité $\lambda(x_1 - 1) = 0$ donne :

- Si $x_1 < 1$ alors $\lambda = 0$ et $4x_1^3 - 4x_1 = 0$ donc $x_1 \in \{-1, 0, 1\}$, mais $x_1 < 1$ élimine 1 :

$$(-1, 0), (0, 0),$$

avec $\lambda = \mu = 0$.

- Si $x_1 = 1$, alors $4x_1^3 - 4x_1 + \lambda = 0$ donne $\lambda = 0$, donc $\mu = 0$:

$$(1, 0).$$

Au total, les points KKT sont :

$$(-1, 0), (0, 0), (1, 0), (0, 1/\sqrt{2}), (-1, 1/\sqrt{2}),$$

tous avec $\lambda = \mu = 0$. On calcule f en ces points :

$$f(-1, 0) = -1, \quad f(0, 0) = 0, \quad f(1, 0) = -1, \quad f(0, 1/\sqrt{2}) = -1/4, \quad f(-1, 1/\sqrt{2}) = -5/4.$$

Le minimum est donc atteint en $(-1, 1/\sqrt{2})$ et vaut $-5/4$.