

|                               |
|-------------------------------|
| Introduction à l'optimisation |
|-------------------------------|

Tout document écrit à la main ou tapé à l'ordinateur est autorisé. Toutes communications ou appareils électroniques sont interdits. Il est recommandé de citer les théorèmes du polycopié utilisés. Il sera tenu compte de la clarté de la copie.

1. (5 points) **Optimisation quadratique et dualité.**

On considère le problème d'optimisation suivant:

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \quad & (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{s.c.} \quad & x_1 \geq 0, \\ & x_1 + x_2 - 3 \leq 0. \end{aligned}$$

- (a) (3 points) Résoudre le problème à l'aide des conditions de KKT.
- (b) (2 points) Expliciter le problème dual comme un problème de maximisation sous contraintes. Quelle est la relation entre ces deux problèmes ? Justifier.

2. (5 points) **Gradient projeté.**

Considérons le problème d'optimisation suivant:

$$\begin{aligned} \text{Min}_{x_1, x_2} \quad & (x_1 - 3)^2 + 2(x_2 - 4)^2 \\ \text{s.c.} \quad & 0 \leq x_1 \leq 2 \\ & 0 \leq x_2 \leq 8 \end{aligned}$$

- (a) (3 points) Calculer les deux premières itérations de la méthode du gradient à pas fixe  $\alpha = 0.5$  en partant du point initial  $x^{(0)} = (0, 0)$ .
  - (b) (2 points) Justifier que l'algorithme ne converge pas vers la solution optimale. Que faudrait-il modifier pour que l'algorithme converge ?
3. (5 points) **Problème de Unit Commitment** On considère que l'on dispose de  $n$  centrales électriques, chacune ayant une capacité de production maximale (par pas de temps)  $G_i^{\max}$ , un coût de production  $c_i u_{i,t} + d_i u_{i,t}^2$  pour  $u_{i,t}$  unité d'énergie produite à l'heure  $t$ . La demande totale d'énergie à satisfaire est  $(D_t)_{t \in [24]}$ . Le but est de déterminer, pour chaque centrale, le planning de production afin de minimiser le coût total tout en satisfaisant la demande.
- (a) (1 point) Modéliser ce problème comme un problème d'optimisation. Quel est le type de problème obtenu ? Détailler le nombre de variables, de contraintes, la nature de la fonction objectif.
  - (b) (1 point) Justifier que le problème se décompose en sous-problèmes plus simples. Proposer un algorithme pour résoudre ce problème. Justifier votre choix.
  - (c) (1 point) Nous souhaitons ajouter une contrainte de rampe, c'est-à-dire que la production d'une centrale ne peut pas augmenter ou diminuer trop rapidement entre deux heures consécutives. Comment modéliser cette contrainte ? Quel impact cela a-t-il sur la résolution du problème ?
  - (d) (2 points) Supposons maintenant que  $d_i = 0$  mais qu'il y ait un coût fixe  $f_i$  associé à la mise en marche de chaque centrale  $i$ . Modéliser ce problème comme un problème linéaire en nombres entiers.

4. (8 points) **Optimisation non-linéaire.**

On s'intéresse au problème suivant:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \sum_{i=1}^n x_i^2 - \cos(x_i) \\ \text{s.c.} & \prod_{i=1}^n x_i = 1 \end{array}$$

- (a) (1 point) Prouver que le problème admet une solution optimale.
- (b) (2 points) Écrire les conditions de KKT et spécifier leur nature (nécessaires/suffisantes) pour ce problème.
- (c) (1 point) Montrer que  $x \mapsto 2x^2 + x \sin(x)$  est paire<sup>1</sup> et strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ .
- (d) (2 points) En déduire que si  $x^*$  est une solution optimale du problème, alors pour tout  $i, j$ ,  $|x_i^*| = |x_j^*|$ .
- (e) (2 points) En déduire l'ensemble des solutions optimales du problème.

---

<sup>1</sup>Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est paire si et seulement si  $f(-x) = f(x)$  pour tout  $x$ .